



i Hinweis: KI-generierte Musterlösung - bei Unklarheiten gerne nochmal im Buch nachschlagen.

AUFGABE 1a

TIPP: Wende die Potenzregel auf jeden Summanden einzeln an: aus x^n wird $n \cdot x^{n-1}$.

SCHRITT 1: Leite jeden Summanden von $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$ einzeln ab. Für $3x^4$ ergibt die Potenzregel $3 \cdot 4 \cdot x^3 = 12x^3$.

SCHRITT 2: Für $-2x^3$ ergibt sich $-2 \cdot 3 \cdot x^2 = -6x^2$.

SCHRITT 3: Für $5x$ ergibt sich $5 \cdot 1 \cdot x^0 = 5$, und die Konstante -7 fällt beim Ableiten weg (Ableitung 0).

SCHRITT 4: Setze alle abgeleiteten Summanden zusammen.

ENDERGEBNIS: $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5$

AUFGABE 1b

TIPP: Die Produktregel lautet $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Bestimme zuerst u , v , u' und v' getrennt.

SCHRITT 1: Setze $u(x) = 2x^2 - 1$ und $v(x) = x + 4$. Dann ist $u'(x) = 4x$ und $v'(x) = 1$.

SCHRITT 2: Setze in die Produktregel ein: $g'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 4x \cdot (x + 4) + (2x^2 - 1) \cdot 1$.

SCHRITT 3: Multipliziere aus: $4x \cdot (x + 4) = 4x^2 + 16x$, und $(2x^2 - 1) \cdot 1 = 2x^2 - 1$.

SCHRITT 4: Fasse alle Terme zusammen: $4x^2 + 16x + 2x^2 - 1 = 6x^2 + 16x - 1$.

ENDERGEBNIS: $g'(x) = 6x^2 + 16x - 1$





AUFGABE 1c

TIPP: Die Kettenregel lautet (äußere Funktion(innere Funktion))' = äußere Ableitung(innere Funktion) · innere Ableitung. Erkenne zuerst, was die äußere und was die innere Funktion ist.

SCHRITT 1: Die äußere Funktion ist „etwas hoch 2“, die innere Funktion ist $u(x) = 3x - 5$.

SCHRITT 2: Die äußere Ableitung (nach u abgeleitet) ist $2 \cdot u$, die innere Ableitung ist $u'(x) = 3$.

SCHRITT 3: Setze in die Kettenregel ein: $h'(x) = 2 \cdot (3x - 5) \cdot 3$.

SCHRITT 4: Multipliziere aus: $2 \cdot 3 = 6$, also $h'(x) = 6 \cdot (3x - 5) = 18x - 30$.

ENDERGEBNIS: $h'(x) = 18x - 30$

AUFGABE 2a

TIPP: Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Weges nach der Zeit. Leite $s(t)$ mit der Potenzregel ab und setze anschließend $t = 2$ ein.

SCHRITT 1: Leite $s(t) = -t^3 + 6t^2$ ab: aus $-t^3$ wird $-3t^2$, aus $6t^2$ wird $12t$.

ZWISCHENERGEBNIS: $v(t) = -3t^2 + 12t$

SCHRITT 2: Setze $t = 2$ in $v(t)$ ein: $v(2) = -3 \cdot (2)^2 + 12 \cdot 2 = -3 \cdot 4 + 24$.

SCHRITT 3: Rechne aus: $-12 + 24 = 12$.

ENDERGEBNIS: $v(t) = -3t^2 + 12t$, $v(2) = 12 \text{ m/s}$

AUFGABE 2b

TIPP: Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit, also die zweite Ableitung des Weges. Nutze dein Ergebnis für $v(t)$ aus Teilaufgabe a).

SCHRITT 1: Leite $v(t) = -3t^2 + 12t$ ab: aus $-3t^2$ wird $-6t$, aus $12t$ wird 12 .

ZWISCHENERGEBNIS: $a(t) = -6t + 12$

SCHRITT 2: Setze $t = 2$ ein: $a(2) = -6 \cdot 2 + 12 = -12 + 12$.

ENDERGEBNIS: $a(t) = -6t + 12$, $a(2) = 0 \text{ m/s}^2$





AUFGABE 2c

TIPP: Ein Maximum von $v(t)$ liegt dort, wo die Ableitung von v , also $a(t)$, gleich null ist und ein Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus vorliegt. Du hast $a(t)$ bereits in Teil b) bestimmt.

SCHRITT 1: Setze die notwendige Bedingung für ein Maximum von $v(t)$ an: $v'(t) = a(t) = 0$, also $-6t + 12 = 0$.

SCHRITT 2: Löse nach t auf: $-6t = -12$, also $t = 2$.

SCHRITT 3: Prüfe das Vorzeichen von $a(t)$ um $t = 2$ herum: für t knapp unter 2 ist $a(t) > 0$ (v steigt), für t knapp über 2 ist $a(t) < 0$ (v fällt). Das ist ein Wechsel von Plus nach Minus, also liegt bei $t = 2$ tatsächlich ein Maximum von v vor.

SCHRITT 4: Da $t = 2$ im zulässigen Bereich $0 \leq t \leq 6$ liegt, ist dies der gesuchte Zeitpunkt. (Hinweis: Dies passt auch zu $a(2) = 0$ aus Teilaufgabe b.)

ENDERGEBNIS: Die Geschwindigkeit ist bei $t = 2$ Sekunden maximal, mit $v(2) = 12$ m/s.

AUFGABE 3a

TIPP: Bestimme zuerst $f'(x)$ und $f''(x)$. Lokale Extremstellen erfüllen $f'(x) = 0$; ob Maximum oder Minimum vorliegt, entscheidet das Vorzeichen von $f''(x)$ an dieser Stelle.

SCHRITT 1: Leite $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ab: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

SCHRITT 2: Setze $f'(x) = 0$: $3x^2 - 6x - 9 = 0$. Teile die Gleichung durch 3: $x^2 - 2x - 3 = 0$.

SCHRITT 3: Löse die quadratische Gleichung mit der Mitternachtsformel oder durch Faktorisieren: $x^2 - 2x - 3 = (x - 3) \cdot (x + 1) = 0$, also $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

ZWISCHENERGEBNIS: Mögliche Extremstellen bei $x = 3$ und $x = -1$

SCHRITT 4: Bestimme die zweite Ableitung: $f''(x) = 6x - 6$.

SCHRITT 5: Setze die Stellen ein: $f''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0$, also liegt bei $x = 3$ ein lokales Minimum vor. $f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0$, also liegt bei $x = -1$ ein lokales Maximum vor.

SCHRITT 6: Berechne optional die zugehörigen Funktionswerte: $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$, und $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$.

ENDERGEBNIS: Lokales Maximum bei $x = -1$ (Hochpunkt $(-1 \mid 10)$), lokales Minimum bei $x = 3$ (Tiefpunkt $(3 \mid -22)$)





AUFGABE 3b

TIPP: Eine Wendestelle erfüllt $f''(x) = 0$ mit Vorzeichenwechsel von f'' . Du hast $f''(x)$ bereits in Teilaufgabe a) bestimmt.

SCHRITT 1: Setze $f''(x) = 0$: $6x - 6 = 0$.

SCHRITT 2: Löse nach x auf: $6x = 6$, also $x = 1$.

SCHRITT 3: Prüfe den Vorzeichenwechsel: für $x < 1$ ist $f''(x) < 0$ (Rechtskrümmung), für $x > 1$ ist $f''(x) > 0$ (Linkskrümmung) - es liegt also tatsächlich ein Vorzeichenwechsel und damit eine Wendestelle vor.

SCHRITT 4: Berechne den zugehörigen Funktionswert: $f(1) = 1 - 3 - 9 + 5 = -6$.

ENDERGEBNIS: Wendestelle bei $x = 1$, Wendepunkt $(1 \mid -6)$

AUFGABE 3c

TIPP: f ist genau dort streng monoton fallend, wo $f'(x) < 0$ ist. Nutze die Nullstellen von f' aus Teilaufgabe a), um das Vorzeichen von f' in den dazwischenliegenden Intervallen zu bestimmen.

SCHRITT 1: Aus Teilaufgabe a) ist bekannt: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ mit Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 3$. Da f' eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, ist $f'(x)$ zwischen den Nullstellen negativ und außerhalb positiv.

SCHRITT 2: Das bedeutet: $f'(x) < 0$ für $-1 < x < 3$, also ist f in diesem Bereich streng monoton fallend.

SCHRITT 3: Zur Kontrolle passt das auch zu Teilaufgabe a): links von $x = -1$ steigt f bis zum Hochpunkt, zwischen -1 und 3 fällt f bis zum Tiefpunkt, rechts von $x = 3$ steigt f wieder.

ENDERGEBNIS: f ist streng monoton fallend auf dem Intervall $] -1 ; 3[$, da dort $f'(x) < 0$ gilt.





AUFGABE 4a

TIPP: Bestimme zuerst die allgemeine Ableitung $G'(x)$ und setze dann $x = 3$ ein. Überlege anschließend, was eine momentane Änderungsrate im Sachzusammenhang Gewinn/Stückzahl bedeutet.

SCHRITT 1: Leite $G(x) = -2x^2 + 24x - 40$ ab: $G'(x) = -4x + 24$.

SCHRITT 2: Setze $x = 3$ ein: $G'(3) = -4 \cdot 3 + 24 = -12 + 24$.

SCHRITT 3: Rechne aus: $G'(3) = 12$.

SCHRITT 4: Interpretiere das Ergebnis: Da x in Hundert Stück und G in Tausend Euro gemessen wird, bedeutet $G'(3) = 12$, dass bei einer Produktion von 300 Stück eine Erhöhung der Stückzahl um weitere 100 Stück den Gewinn näherungsweise um 12.000 Euro steigern würde.

ENDERGEBNIS: $G'(3) = 12$ (Tausend Euro pro Hundert Stück) - der Gewinn steigt bei $x = 3$ noch an.

AUFGABE 4b

TIPP: Der maximale Gewinn liegt dort, wo $G'(x) = 0$ ist und $G''(x) < 0$ gilt (Hochpunkt der Parabel). Du kennst $G'(x)$ bereits aus Teilaufgabe a).

SCHRITT 1: Setze die notwendige Bedingung an: $G'(x) = -4x + 24 = 0$.

SCHRITT 2: Löse nach x auf: $-4x = -24$, also $x = 6$.

SCHRITT 3: Prüfe mit der zweiten Ableitung: $G''(x) = -4$. Da $G''(6) = -4 < 0$ ist, handelt es sich tatsächlich um ein Maximum.

SCHRITT 4: Berechne den zugehörigen maximalen Gewinn durch Einsetzen von $x = 6$ in $G(x)$: $G(6) = -2 \cdot (6)^2 + 24 \cdot 6 - 40 = -2 \cdot 36 + 144 - 40$.

SCHRITT 5: Rechne aus: $-72 + 144 - 40 = 32$.

ENDERGEBNIS: Der Gewinn ist bei $x = 6$ (also 600 Stück) maximal und beträgt $G(6) = 32$, das heißt 32.000 Euro.

