



i Hinweis: KI-generierte Musterlösung - bei Unklarheiten gerne nochmal im Buch nachschlagen.

AUFGABE 1a

TIPP: Nutze die Potenzregel: Beim Ableiten von x^n erhältst du $n \cdot x^{(n-1)}$.

SCHRITT 1: Leite $f(x) = x^3 - 3x^2$ Term für Term ab. Aus x^3 wird $3x^2$, aus $-3x^2$ wird $-6x$.

ZWISCHENERGEBNIS: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

SCHRITT 2: Leite nun $f'(x)$ noch einmal ab, um $f''(x)$ zu erhalten. Aus $3x^2$ wird $6x$, aus $-6x$ wird -6 .

ZWISCHENERGEBNIS: $f''(x) = 6x - 6$

ENDERGEBNIS: $f'(x) = 3x^2 - 6x$ und $f''(x) = 6x - 6$

AUFGABE 1b

TIPP: Setze $f(x) = 0$ und klammere zuerst den gemeinsamen Faktor aus, der in beiden Summanden steckt.

SCHRITT 1: Setze die Funktion gleich null: $x^3 - 3x^2 = 0$.

SCHRITT 2: Klammere x^2 aus, da dies in beiden Termen enthalten ist: $x^2 \cdot (x - 3) = 0$.

SCHRITT 3: Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens ein Faktor null ist. Prüfe beide Faktoren getrennt: $x^2 = 0$ führt zu $x = 0$ (mit Vielfachheit 2, also eine doppelte Nullstelle), und $x - 3 = 0$ führt zu $x = 3$.

ENDERGEBNIS: Die Funktion hat die Nullstellen $x_1 = 0$ (doppelt) und $x_2 = 3$.

AUFGABE 1c

TIPP: Prüfe rechnerisch, ob $f(-x) = f(x)$ (Symmetrie zur y-Achse) oder $f(-x) = -f(x)$ (Punktsymmetrie zum Ursprung) gilt.

SCHRITT 1: Setze $-x$ für x in die Funktionsgleichung ein: $f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2 = -x^3 - 3x^2$.

SCHRITT 2: Vergleiche das Ergebnis mit $f(x) = x^3 - 3x^2$. Da $-x^3 - 3x^2$ nicht gleich $x^3 - 3x^2$ ist, liegt keine Symmetrie zur y-Achse vor.

SCHRITT 3: Vergleiche nun mit $-f(x) = -x^3 + 3x^2$. Auch das stimmt nicht mit $f(-x) = -x^3 - 3x^2$ überein, da sich die Vorzeichen beim zweiten Summanden unterscheiden.

ENDERGEBNIS: Die Funktion f ist weder symmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung, da $f(-x)$ weder $f(x)$ noch $-f(x)$ entspricht.





AUFGABE 2a

TIPP: Notwendige Bedingung für Extrempunkte ist $f'(x) = 0$. Setze anschließend die Lösungen in $f''(x)$ ein, um die Art des Extremums zu bestimmen.

SCHRITT 1: Bilde die notwendige Bedingung $g'(x) = 0$, also $3x^2 - 6x = 0$.

SCHRITT 2: Klammere x aus: $x \cdot (3x - 6) = 0$. Daraus folgen die beiden Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

ZWISCHENERGEBNIS: Mögliche Extremstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

SCHRITT 3: Prüfe die hinreichende Bedingung mit der zweiten Ableitung $g''(x) = 6x - 6$. Setze $x_1 = 0$ ein: $g''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6$. Da $g''(0) < 0$ ist, liegt bei $x_1 = 0$ ein lokales Maximum vor.

SCHRITT 4: Setze $x_2 = 2$ ein: $g''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6$. Da $g''(2) > 0$ ist, liegt bei $x_2 = 2$ ein lokales Minimum vor.

SCHRITT 5: Berechne die zugehörigen y -Werte, indem du die x -Werte in $g(x) = x^3 - 3x^2$ einsetzt. Für $x_1 = 0$: $g(0) = 0 - 0 = 0$. Für $x_2 = 2$: $g(2) = 8 - 3 \cdot 4 = 8 - 12 = -4$.

ENDERGEBNIS: Lokales Maximum bei $(0 | 0)$ und lokales Minimum bei $(2 | -4)$.

AUFGABE 2b

TIPP: Nutze die Extrempunkte aus Aufgabe 2a als Grenzen der Intervalle und prüfe das Vorzeichen von $g'(x)$ in jedem Bereich.

SCHRITT 1: Die Extremstellen $x = 0$ und $x = 2$ teilen die x -Achse in drei Bereiche: $x < 0$, $0 < x < 2$ und $x > 2$.

SCHRITT 2: Prüfe das Vorzeichen von $g'(x) = 3x^2 - 6x$ im Bereich $x < 0$, zum Beispiel mit $x = -1$: $g'(-1) = 3 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) = 3 + 6 = 9 > 0$. Die Funktion steigt hier also streng monoton.

SCHRITT 3: Prüfe den Bereich $0 < x < 2$, zum Beispiel mit $x = 1$: $g'(1) = 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3 < 0$. Die Funktion fällt hier also streng monoton.

SCHRITT 4: Prüfe den Bereich $x > 2$, zum Beispiel mit $x = 3$: $g'(3) = 3 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0$. Die Funktion steigt hier also wieder streng monoton.

ENDERGEBNIS: g ist streng monoton steigend für $x < 0$ und für $x > 2$, und streng monoton fallend für $0 < x < 2$.





AUFGABE 3a

TIPP: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist $g''(x) = 0$. Die hinreichende Bedingung prüfst du mit $g'''(x)$.

SCHRITT 1: Bilde die dritte Ableitung von g . Aus $g''(x) = 6x - 6$ folgt durch erneutes Ableiten $g'''(x) = 6$.

SCHRITT 2: Setze die notwendige Bedingung $g''(x) = 0$ an: $6x - 6 = 0$, also $x = 1$.

SCHRITT 3: Prüfe die hinreichende Bedingung $g'''(x)$ ungleich 0. Da $g'''(x) = 6$ für alle x konstant und damit ungleich 0 ist, liegt bei $x = 1$ tatsächlich ein Wendepunkt vor.

SCHRITT 4: Berechne den zugehörigen y -Wert durch Einsetzen von $x = 1$ in $g(x) = x^3 - 3x^2$: $g(1) = 1 - 3 = -2$.

ENDERGEBNIS: Der Wendepunkt liegt bei $(1 \mid -2)$.

AUFGABE 3b

TIPP: Überlege, wie sich das Krümmungsverhalten links und rechts von $x = 1$ unterscheidet (vergleiche mit den Vorzeichen von $g''(x)$ aus Aufgabe 2a).

SCHRITT 1: Da $g''(x) = 6x - 6$ für $x < 1$ negativ und für $x > 1$ positiv ist, wechselt die Krümmung des Graphen an dieser Stelle von rechtsgekrümmt (konkav) zu linksgekrümmt (konvex).

ENDERGEBNIS: Im Wendepunkt $(1 \mid -2)$ wechselt der Graph von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung, das heißt die Krümmungsrichtung des Funktionsgraphen dreht sich dort um.

AUFGABE 4a

TIPP: Setze $-x$ in die Funktion ein und prüfe, ob sich dasselbe wie $h(x)$ ergibt.

SCHRITT 1: Setze $-x$ für x ein: $h(-x) = -\frac{1}{4} \cdot (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2$.

SCHRITT 2: Vereinfache die Potenzen. Da $(-x)^4 = x^4$ und $(-x)^2 = x^2$ gilt, ergibt sich $h(-x) = -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2x^2$.

SCHRITT 3: Vergleiche dieses Ergebnis mit $h(x) = -\frac{1}{4} x^4 + 2x^2$. Beide Terme sind identisch.

ENDERGEBNIS: Da $h(-x) = h(x)$ gilt, ist h symmetrisch zur y -Achse (achsensymmetrisch).





AUFGABE 4b

TIPP: Setze $h(x) = 0$ und klammere x^2 aus, danach bleibt eine quadratische Gleichung übrig, die du mit einer Substitution lösen kannst.

SCHRITT 1: Setze die Funktion gleich null: $-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = 0$.

SCHRITT 2: Klammere x^2 aus: $x^2 \cdot (-\frac{1}{4}x^2 + 2) = 0$.

SCHRITT 3: Der erste Faktor $x^2 = 0$ liefert die Lösung $x_1 = 0$.

SCHRITT 4: Setze den zweiten Faktor gleich null: $-\frac{1}{4}x^2 + 2 = 0$. Forme um zu $\frac{1}{4}x^2 = 2$, also $x^2 = 8$.

SCHRITT 5: Ziehe die Wurzel auf beiden Seiten: $x = \sqrt{8}$ oder $x = -\sqrt{8}$. Da $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{2}$ ist, ergeben sich $x_2 = 2 \cdot \sqrt{2}$ und $x_3 = -2 \cdot \sqrt{2}$.

ENDERGEBNIS: Die Nullstellen sind $x_1 = 0$, $x_2 = 2 \cdot \sqrt{2}$ (ungefähr 2,83) und $x_3 = -2 \cdot \sqrt{2}$ (ungefähr -2,83).

AUFGABE 4c

TIPP: Bilde zunächst $h'(x)$ und $h''(x)$, setze dann die notwendige Bedingung $h'(x) = 0$ und prüfe mit $h''(x)$ die Art der Extrempunkte.

SCHRITT 1: Bilde die erste Ableitung: $h'(x) = -x^3 + 4x$. Bilde die zweite Ableitung: $h''(x) = -3x^2 + 4$.

SCHRITT 2: Setze die notwendige Bedingung an: $-x^3 + 4x = 0$. Klammere x aus: $x \cdot (-x^2 + 4) = 0$.

SCHRITT 3: Der erste Faktor liefert $x_1 = 0$. Der zweite Faktor $-x^2 + 4 = 0$ führt zu $x^2 = 4$, also $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$.

ZWISCHENERGEBNIS: Mögliche Extremstellen bei $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$.

SCHRITT 4: Prüfe die hinreichende Bedingung mit $h''(x) = -3x^2 + 4$. Für $x_1 = 0$: $h''(0) = 4 > 0$, also liegt dort ein lokales Minimum vor.

SCHRITT 5: Für $x_2 = 2$: $h''(2) = -3 \cdot 4 + 4 = -12 + 4 = -8 < 0$, also liegt dort ein lokales Maximum vor. Für $x_3 = -2$: $h''(-2) = -3 \cdot 4 + 4 = -8 < 0$, also liegt dort ebenfalls ein lokales Maximum vor.

SCHRITT 6: Berechne die y-Werte durch Einsetzen in $h(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$. Für $x_1 = 0$: $h(0) = 0$. Für $x_2 = 2$: $h(2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 2 \cdot 4 = -4 + 8 = 4$. Für $x_3 = -2$: $h(-2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 2 \cdot 4 = 4$ (wegen der Achsensymmetrie identisch zu x_2).

ENDERGEBNIS: Lokales Minimum bei $(0 | 0)$, lokales Maximum bei $(2 | 4)$ und lokales Maximum bei $(-2 | 4)$.

