



i Hinweis: KI-generierte Musterlösung - bei Unklarheiten gerne nochmal im Buch nachschlagen.

AUFGABE 1a

TIPP: Überlege dir, wie sich ein Prozentsatz von 2,5 Prozent in einen Wachstumsfaktor umrechnen lässt, und erinnere dich an die allgemeine Form $K(t) = K_0 \cdot q^t$.

SCHRITT 1: Bei einer jährlichen Zinssteigerung von 2,5 Prozent bleibt das ursprüngliche Kapital (100 Prozent) erhalten und es kommen 2,5 Prozent hinzu. Das ergibt zusammen 102,5 Prozent, also den Faktor 1,025.

ZWISCHENERGEBNIS: Wachstumsfaktor $q = 1,025$

SCHRITT 2: Die Exponentialgleichung für Wachstumsprozesse lautet allgemein $K(t) = K_0 \cdot q^t$, wobei K_0 das Startkapital ist. Hier ist $K_0 = 4.000$ Euro.

ENDERGEBNIS: Wachstumsfaktor $q = 1,025$, Funktionsgleichung $K(t) = 4.000 \cdot 1,025^t$

AUFGABE 1b

TIPP: Setze einfach $t = 6$ in die in a) aufgestellte Funktionsgleichung ein.

SCHRITT 1: Wir verwenden $K(t) = 4.000 \cdot 1,025^t$ und setzen $t = 6$ ein: $K(6) = 4.000 \cdot 1,025^6$.

SCHRITT 2: Berechne zunächst den Potenzwert: $1,025^6 \approx 1,159693$.

SCHRITT 3: Multipliziere diesen Wert mit dem Startkapital: $4.000 \cdot 1,159693 \approx 4.638,77$.

ENDERGEBNIS: Nach 6 Jahren beträgt der Kontostand etwa 4.638,77 Euro.





AUFGABE 1c

TIPP: Du musst die Ungleichung $4.000 \cdot 1,025^t > 5.000$ für ganzzahlige t durch Ausprobieren oder Logarithmieren lösen.

SCHRITT 1: Stelle die Ungleichung auf: $4.000 \cdot 1,025^t > 5.000$. Teile beide Seiten durch 4.000: $1,025^t > 1,25$.

SCHRITT 2: Logarithmiere beide Seiten (z. B. mit dem natürlichen Logarithmus): $t > \ln(1,25) / \ln(1,025)$.

SCHRITT 3: Berechne den Quotienten: $\ln(1,25) \approx 0,22314$, $\ln(1,025) \approx 0,02469$, also $t > 9,037$.

SCHRITT 4: Da t die Anzahl voller Jahre angibt, muss auf die nächste ganze Zahl aufgerundet werden: $t = 10$. Zur Kontrolle: $K(9) = 4.000 \cdot 1,025^9 \approx 4.995,45$ Euro (noch unter 5.000), $K(10) = 4.000 \cdot 1,025^{10} \approx 5.120,34$ Euro (über 5.000).

ENDERGEBNIS: Nach 10 vollen Jahren übersteigt das Kapital erstmals 5.000 Euro.

AUFGABE 2a

TIPP: Ein Wachstum um 15 Prozent bedeutet, dass der neue Bestand 115 Prozent des alten Bestands ist.

SCHRITT 1: 15 Prozent Zuwachs bedeuten, dass zum ursprünglichen Bestand (100 Prozent) noch 15 Prozent hinzukommen, also insgesamt 115 Prozent bzw. der Faktor 1,15.

ZWISCHENERGEBNIS: Wachstumsfaktor $q = 1,15$

SCHRITT 2: Mit dem Startbestand $B_0 = 800$ lautet die Funktionsgleichung $B(t) = 800 \cdot 1,15^t$, wobei t die Zeit in Stunden ist.

ENDERGEBNIS: Wachstumsfaktor $q = 1,15$, Funktionsgleichung $B(t) = 800 \cdot 1,15^t$

AUFGABE 2b

TIPP: Setze $t = 8$ in die Funktionsgleichung aus a) ein und runde am Ende sinnvoll, da es sich um eine Anzahl von Bakterien handelt.

SCHRITT 1: $B(8) = 800 \cdot 1,15^8$.

SCHRITT 2: Berechne den Potenzwert: $1,15^8 \approx 3,05902$.

SCHRITT 3: Multipliziere: $800 \cdot 3,05902 \approx 2.447,22$.





ENDERGEBNIS: Nach 8 Stunden umfasst die Kultur etwa 2.447 Bakterien (gerundet auf eine ganze Anzahl).

AUFGABE 2c

TIPP: Überlege, was $t = 0$ in der Zeitrechnung des Beobachtungszeitraums bedeutet.

SCHRITT 1: Setzt man $t = 0$ in $B(t) = 800 \cdot 1,15^t$ ein, erhält man $B(0) = 800 \cdot 1,15^0 = 800 \cdot 1 = 800$.

SCHRITT 2: Das ist genau der Startwert, also die Anzahl der Bakterien zu Beginn der Beobachtung.

ENDERGEBNIS: $B(0) = 800$ bedeutet, dass zu Beobachtungsbeginn ($t = 0$ Stunden) 800 Bakterien vorhanden waren.

AUFGABE 3a

TIPP: Bei einer Abnahme musst du den Prozentsatz von 100 Prozent abziehen, nicht addieren.

SCHRITT 1: Eine jährliche Abnahme um 12 Prozent bedeutet, dass vom alten Wert (100 Prozent) jedes Jahr nur noch $100 - 12 = 88$ Prozent übrig bleiben, also der Faktor 0,88.

ZWISCHENERGEBNIS: Abnahmefaktor $q = 0,88$

SCHRITT 2: Mit dem Startwert $W_0 = 18.000$ Euro lautet die Wertfunktion $W(t) = 18.000 \cdot 0,88^t$.

ENDERGEBNIS: Abnahmefaktor $q = 0,88$, Funktionsgleichung $W(t) = 18.000 \cdot 0,88^t$





AUFGABE 3b

TIPP: Setze $t = 5$ in die Wertfunktion aus a) ein.

SCHRITT 1: $W(5) = 18.000 \cdot 0,88^5$.

SCHRITT 2: Berechne den Potenzwert: $0,88^5 \approx 0,5277319$.

SCHRITT 3: Multipliziere: $18.000 \cdot 0,5277319 \approx 9.499,17$.

ENDERGEBNIS: Nach 5 Jahren beträgt der Wert des Autos etwa 9.499,17 Euro.

AUFGABE 3c

TIPP: Stelle wie bei Aufgabe 1c eine Ungleichung auf und löse sie mit dem Logarithmus oder durch gezieltes Ausprobieren ganzzahliger Werte für t .

SCHRITT 1: Gesucht ist das kleinste ganzzahlige t mit $18.000 \cdot 0,88^t < 9.000$.
Division durch 18.000 ergibt $0,88^t < 0,5$.

SCHRITT 2: Logarithmiere beide Seiten: $t > \ln(0,5) / \ln(0,88)$ (das Ungleichheitszeichen dreht sich um, da $\ln(0,88)$ negativ ist).

SCHRITT 3: Berechne: $\ln(0,5) \approx -0,69315$, $\ln(0,88) \approx -0,12783$, also $t > 5,423$.

SCHRITT 4: Da nach vollen Jahren gefragt ist, wird aufgerundet: $t = 6$. Zur Kontrolle:
 $W(5) \approx 9.499,17$ Euro (noch über 9.000), $W(6) = 18.000 \cdot 0,88^6 \approx 8.359,27$ Euro (unter 9.000).

ENDERGEBNIS: Nach 6 vollen Jahren ist der Wert des Autos erstmals unter 9.000 Euro gefallen.





AUFGABE 4

TIPP: Überlege für jede Beschreibung zunächst den Startwert (er muss mit dem Faktor vor der Potenz übereinstimmen) und erst danach, ob es sich um Wachstum (Faktor größer 1) oder Abnahme (Faktor kleiner 1) handelt.

SCHRITT 1: Beschreibung (1) hat Startkapital 2.000 Euro und 3 Prozent Zinseszins, also Faktor 1,03. Das passt zu Gleichung B) $f(t) = 2.000 \cdot 1,03^t$.

ZWISCHENERGEBNIS: (1) passt zu B)

SCHRITT 2: Beschreibung (3) hat Startwert 1.200 Euro und eine Abnahme um 20 Prozent, also Faktor $1 - 0,20 = 0,80$. Das passt zu Gleichung A) $f(t) = 1.200 \cdot 0,8^t$.

ZWISCHENERGEBNIS: (3) passt zu A)

SCHRITT 3: Für Beschreibung (2) bleibt nur noch Gleichung C) $f(t) = 500 \cdot 1,0718^t$ übrig, was auch zum genannten Startbestand 500 passt. Man kann zusätzlich prüfen: Eine Verdopplung nach etwa 10 Jahren bedeutet $q^{10} \approx 2$, also $q \approx 2^{(1/10)} \approx 1,0718$ - genau der Faktor in Gleichung C).

ENDERGEBNIS: (1) - B), (2) - C), (3) - A)

AUFGABE 5a

TIPP: Für Modell A brauchst du die Zinseszinsformel, für Modell B reicht eine einfache Multiplikation, da jedes Jahr derselbe feste Betrag an Zinsen hinzukommt.

SCHRITT 1: Modell A (Zinseszins): Startkapital 3.000 Euro, Zinssatz 4 Prozent, also Faktor 1,04. Nach 4 Jahren: $K_A(4) = 3.000 \cdot 1,04^4$.

SCHRITT 2: Berechne den Potenzwert: $1,04^4 \approx 1,16986$. Damit ist $K_A(4) \approx 3.000 \cdot 1,16986 \approx 3.509,58$ Euro.

ZWISCHENERGEBNIS: Modell A: Endkapital $\approx 3.509,58$ Euro

SCHRITT 3: Modell B (lineares Wachstum): Jedes Jahr kommen feste 130 Euro Zinsen hinzu, bei 4 Jahren also $4 \cdot 130 = 520$ Euro insgesamt. Das Endkapital ist $K_B(4) = 3.000 + 520 = 3.520$ Euro.

ENDERGEBNIS: Modell A: ca. 3.509,58 Euro, Modell B: 3.520,00 Euro





AUFGABE 5b

TIPP: Vergleiche zunächst die beiden Endkapitale aus a) und überlege dann, wie sich Zinseszins (exponentiell) im Vergleich zu linearem Wachstum über einen sehr langen Zeitraum entwickelt.

SCHRITT 1: Nach 4 Jahren liefert Modell B mit 3.520,00 Euro ein etwas höheres Endkapital als Modell A mit ca. 3.509,58 Euro. Nach 4 Jahren lohnt sich also Modell B geringfügig mehr.

SCHRITT 2: Der Grund für den noch kleinen Unterschied liegt darin, dass sich der Zinseszins-Effekt von Modell A erst über die Zeit richtig entfalten kann: Bei Modell A werden die Zinsen jedes Jahr auf ein bereits gewachsenes Kapital berechnet (exponentielles Wachstum), während bei Modell B immer nur auf das gleichbleibende Startkapital von 3.000 Euro bezogen 130 Euro ausgezahlt werden (lineares Wachstum).

SCHRITT 3: Da eine Exponentialfunktion langfristig immer stärker wächst als eine lineare Funktion, wird Modell A irgendwann Modell B überholen und der Vorsprung von Modell A würde bei einem längeren Anlagezeitraum (z. B. 20 oder 30 Jahre) immer deutlicher ausfallen.

ENDERGEBNIS: Nach 4 Jahren lohnt sich Modell B knapp mehr (3.520,00 Euro gegenüber ca. 3.509,58 Euro bei Modell A). Langfristig würde sich jedoch Modell A durchsetzen, da der Zinseszinseffekt exponentielles Wachstum erzeugt, das lineares Wachstum auf Dauer immer übertrifft.

