



i Hinweis: KI-generierte Musterlösung - bei Unklarheiten gerne nochmal im Buch nachschlagen.

AUFGABE 1a

TIPP: Wende die Potenzregel auf jeden Summanden einzeln an: aus x^n wird $n \cdot x^{(n-1)}$.

SCHRITT 1: Leite jeden Summanden von $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$ einzeln ab. Für $3x^4$ ergibt die Potenzregel $4 \cdot 3x^3 = 12x^3$, für $-2x^3$ ergibt sich $3 \cdot (-2)x^2 = -6x^2$.

SCHRITT 2: Der lineare Term $5x$ wird zu 5 (die Ableitung von x ist 1), und die Konstante -7 fällt beim Ableiten weg, da sie sich nicht verändert.

SCHRITT 3: Setze alle abgeleiteten Terme zusammen.

ENDERGEBNIS: $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5$

AUFGABE 1b

TIPP: Auch hier hilft die Potenzregel - achte auf den Faktor $\frac{1}{2}$ vor x^3 .

SCHRITT 1: Leite $\frac{1}{2}x^3$ ab: der Exponent 3 wandert als Faktor vor den Bruch, also $3 \cdot (\frac{1}{2})x^2 = \frac{3}{2}x^2$.

SCHRITT 2: Leite $-4x^2$ ab: $2 \cdot (-4)x = -8x$.

SCHRITT 3: Die Konstante 6 fällt beim Ableiten weg.

ENDERGEBNIS: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x$

AUFGABE 1c

TIPP: Du kannst entweder zuerst ausmultiplizieren und dann ableiten, oder direkt die Produktregel anwenden - beide Wege führen zum selben Ergebnis.

SCHRITT 1: Multipliziere zunächst aus: $(2x - 3) \cdot (x + 4) = 2x \cdot x + 2x \cdot 4 - 3 \cdot x - 3 \cdot 4 = 2x^2 + 8x - 3x - 12$.

SCHRITT 2: Fasse die Terme zusammen: $2x^2 + 5x - 12$.

SCHRITT 3: Leite diese vereinfachte Form Glied für Glied ab: aus $2x^2$ wird $4x$, aus $5x$ wird 5, die Konstante -12 fällt weg.

ENDERGEBNIS: $f'(x) = 4x + 5$

AUFGABE 1d

TIPP: Schreibe den Bruch $-6/x$ zunächst als Potenz um ($-6 \cdot x^{(-1)}$), dann kannst du ganz normal die Potenzregel anwenden.





SCHRITT 1: Forme $f(x) = x^3 - 6/x$ um zu $f(x) = x^3 - 6x^{-1}$.

SCHRITT 2: Leite x^3 ab: das ergibt $3x^2$.

SCHRITT 3: Leite $-6x^{-1}$ ab: der Exponent -1 wandert als Faktor vor, also $(-1) \cdot (-6)x^{-2} = 6x^{-2}$.

SCHRITT 4: Schreibe das Ergebnis wieder als Bruch, da x^{-2} gleich $1/x^2$ ist.

ENDERGEBNIS: $f'(x) = 3x^2 + 6/x^2$

AUFGABE 2a

TIPP: Leite f zuerst einmal ab, um f' zu erhalten, und leite dann f' noch einmal ab, um f'' zu erhalten.

SCHRITT 1: Leite $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ Glied für Glied ab: aus x^3 wird $3x^2$, aus $-3x^2$ wird $-6x$, aus $-9x$ wird -9 , und die Konstante 5 fällt weg.

ZWISCHENERGEBNIS: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

SCHRITT 2: Leite nun $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ noch einmal ab: aus $3x^2$ wird $6x$, aus $-6x$ wird -6 , die Konstante -9 fällt weg.

ENDERGEBNIS: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ und $f''(x) = 6x - 6$

AUFGABE 2b

TIPP: Die Steigung an einer bestimmten Stelle erhältst du, indem du die Stelle in die erste Ableitung einsetzt.

SCHRITT 1: Nutze die bereits berechnete erste Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

SCHRITT 2: Setze $x = 1$ ein: $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 9 = 3 - 6 - 9$.

SCHRITT 3: Rechne das Ergebnis aus: $3 - 6 - 9 = -12$.

ENDERGEBNIS: Die Steigung an der Stelle $x = 1$ beträgt $f'(1) = -12$.





AUFGABE 2c

TIPP: Überlege dir, was ein negativer, positiver oder Null-Wert der Ableitung jeweils über das Steigungsverhalten des Graphen aussagt.

SCHRITT 1: Der berechnete Wert $f'(1) = -12$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 1$.

SCHRITT 2: Da dieser Wert negativ ist, fällt der Graph an dieser Stelle - das heißt, die Funktionswerte nehmen dort ab, wenn x wächst.

SCHRITT 3: Je größer der Betrag der Steigung ist, desto steiler verläuft der Graph - ein Wert von -12 bedeutet also ein recht deutliches Gefälle an dieser Stelle.

ENDERGEBNIS: Der Graph von f fällt an der Stelle $x = 1$ recht steil, da die Steigung dort negativ ist ($f'(1) = -12$).

AUFGABE 3a

TIPP: Mögliche Extremstellen findest du, indem du zuerst die erste Ableitung bildest und diese dann gleich null setzt.

SCHRITT 1: Bilde die erste Ableitung von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

SCHRITT 2: Setze $f'(x) = 0$, also $3x^2 - 12x + 9 = 0$. Teile die Gleichung durch 3, um sie zu vereinfachen: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

SCHRITT 3: Wende die Mitternachtsformel (oder p-q-Formel) an: mit $p = -4$ und $q = 3$ ergibt sich $x = (4 \pm \sqrt{16 - 12}) / 2 = (4 \pm 2) / 2$.

SCHRITT 4: Berechne beide Lösungen: $x_1 = (4 + 2)/2 = 3$ und $x_2 = (4 - 2)/2 = 1$.

ENDERGEBNIS: Die Nullstellen von $f'(x)$ sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ - das sind die x-Koordinaten der möglichen Extrempunkte.





AUFGABE 3b

TIPP: Setze die gefundenen Stellen in die zweite Ableitung ein - ein negatives Vorzeichen deutet auf einen Hochpunkt hin, ein positives auf einen Tiefpunkt.

SCHRITT 1: Bilde die zweite Ableitung aus $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$: $f''(x) = 6x - 12$.

SCHRITT 2: Setze $x_1 = 1$ ein: $f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6$. Da -6 kleiner als 0 ist, liegt bei $x_1 = 1$ ein Hochpunkt vor.

SCHRITT 3: Setze $x_2 = 3$ ein: $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6$. Da 6 größer als 0 ist, liegt bei $x_2 = 3$ ein Tiefpunkt vor.

ENDERGEBNIS: Bei $x = 1$ liegt ein Hochpunkt vor ($f''(1) = -6 < 0$), bei $x = 3$ liegt ein Tiefpunkt vor ($f''(3) = 6 > 0$).

AUFGABE 3c

TIPP: Setze die x-Werte der Extrempunkte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ ein, um die zugehörigen y-Werte zu erhalten.

SCHRITT 1: Setze $x_1 = 1$ in $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ ein: $f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$.

SCHRITT 2: Setze $x_2 = 3$ ein: $f(3) = 27 - 6 \cdot 9 + 9 \cdot 3 + 2 = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$.

SCHRITT 3: Fasse beide Ergebnisse als vollständige Koordinatenpaare zusammen.

ENDERGEBNIS: Der Hochpunkt liegt bei $H(1 \mid 6)$, der Tiefpunkt liegt bei $T(3 \mid 2)$.

AUFGABE 3d

TIPP: Überlege dir anhand der Lage von Hoch- und Tiefpunkt, in welchen Bereichen der Graph steigt und in welchen er fällt.

SCHRITT 1: Links vom Hochpunkt (für x kleiner als 1) steigt der Graph, da er auf den Hochpunkt bei $x = 1$ zuläuft.

SCHRITT 2: Zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt (für x zwischen 1 und 3) fällt der Graph, da er vom Hochpunkt zum Tiefpunkt verläuft.

SCHRITT 3: Rechts vom Tiefpunkt (für x größer als 3) steigt der Graph wieder, da er vom Tiefpunkt aus weiter ansteigt.

ENDERGEBNIS: Der Graph steigt streng monoton für x kleiner 1, fällt streng monoton für x zwischen 1 und 3, und steigt streng monoton für x größer 3.





AUFGABE 4a

TIPP: Leite $G(x)$ zunächst ab und setze die Ableitung gleich null, um mögliche Extremstellen zu finden.

SCHRITT 1: Bilde die Ableitung von $G(x) = -x^3 + 6x^2$: $G'(x) = -3x^2 + 12x$.

SCHRITT 2: Setze $G'(x) = 0$: $-3x^2 + 12x = 0$. Klammere x aus: $x \cdot (-3x + 12) = 0$.

SCHRITT 3: Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist. Entweder $x = 0$, oder $-3x + 12 = 0$, was $x = 4$ ergibt.

SCHRITT 4: Da nach Stellen mit x größer 0 gefragt ist, kommt nur $x = 4$ infrage.

ENDERGEBNIS: $G'(x) = -3x^2 + 12x$, die Nullstelle mit x größer 0 ist $x = 4$.

AUFGABE 4b

TIPP: Setze $x = 4$ in die zweite Ableitung ein - ein negatives Vorzeichen bestätigt ein Maximum.

SCHRITT 1: Bilde die zweite Ableitung aus $G'(x) = -3x^2 + 12x$: $G''(x) = -6x + 12$.

SCHRITT 2: Setze $x = 4$ ein: $G''(4) = -6 \cdot 4 + 12 = -24 + 12 = -12$.

SCHRITT 3: Da -12 kleiner als 0 ist, liegt bei $x = 4$ tatsächlich ein Maximum vor.

ENDERGEBNIS: $G''(4) = -12 < 0$, also liegt bei $x = 4$ ein Maximum vor.

AUFGABE 4c

TIPP: Setze die gefundene Stelle $x = 4$ in die ursprüngliche Gewinnfunktion $G(x)$ ein, um den maximalen Gewinn zu berechnen.

SCHRITT 1: Die maximale Gewinnmenge liegt bei $x = 4$, das entspricht 400 Stück (da x in Hundert Stück angegeben ist).

SCHRITT 2: Setze $x = 4$ in $G(x) = -x^3 + 6x^2$ ein: $G(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 = -64 + 6 \cdot 16 = -64 + 96$.

SCHRITT 3: Rechne das Ergebnis aus: $-64 + 96 = 32$.

ENDERGEBNIS: Bei $x = 4$ (also 400 Stück) wird der maximale Gewinn von $G(4) = 32$ (Geldeinheiten) erzielt.

